

進化計算に基づく周期倍分岐の解析

| | |
|-----|---|
| 著者 | 沖津 怜直 |
| 出版者 | 法政大学大学院理工学研究科 |
| 雑誌名 | 法政大学大学院紀要．理工学・工学研究科編 |
| 巻 | 61 |
| ページ | 1-3 |
| 発行年 | 2020-03-24 |
| URL | http://doi.org/10.15002/00022823 |

進化計算に基づく周期倍分岐の解析

ANALYSIS OF PERIOD DOUBLING BIFURCATION BASED ON EVOLUTIONARY COMPUTATION

沖津怜直

Satonao OKITSU

指導教員 斎藤利通

法政大学大学院理工学研究科電気電子工学専攻修士課程

This bulletin states application of the particle swarm optimization (PSO) to bifurcation analysis in discrete dynamical systems. The period doubling bifurcation is one of the typical bifurcation phenomena. In order to calculate the period doubling bifurcation sets, we present a PSO algorithm with two key points. First, we define one objective function that can describe multiple bifurcation sets simultaneously. Second, we introduce a simple tabu routine that can search multiple optimization points effectively. We apply the algorithm in the sine-circle map and investigate its performance. The sine-circle map is a typical example that exhibits various bifurcation phenomena in one-dimensional discrete dynamical systems.

Key Words : dynamical systems, period doubling bifurcation, particle swarm optimization

1. はじめに

離散時間力学系の分岐現象解析は重要な基本問題である[1]. 分岐現象とはパラメータの値が変化するとシステムの安定性が変化して様々な現象が生じることをいう. 周期倍分岐はその典型例である. 周期倍分岐が生じると, 安定な不動点が不安定となり, 代わりに安定な 2 周期点が現れる. 同様に, 安定な 2 周期点が不安定となり, 代わりに安定な 4 周期点が現れ … これを繰り返す. また, 周期倍分岐が生じるパラメータ値の集合を周期倍分岐集合とよぶ. 周期倍分岐集合は工学的にはシステムの安定と不安定の境界線ともいえる. 従って, パワーエレクトロニクスや四足歩行ロボットなどのシステムの安定性解析において周期倍分岐は重要である[2][3].

周期倍分岐が生じるためには周期倍分岐条件を満たす必要がある. そこで, 周期倍分岐条件に基づく正定の目的関数を定義する. この目的関数は変数が離散時間力学系のパラメータに対応し, 周期倍分岐条件を満たす場合に目的関数の解条件を満たす. すなわち, 目的関数の解集合が周期倍分岐集合に対応する.

本紀要では進化計算(生物の集団行動を数理モデル化したもの)の一種である粒子群最適化法(Particle Swarm Optimization, PSO)で目的関数の近似解集合を探索することで周期倍分岐集合を導出する問題を考える[4][5]. 従来ならば全探索を適用して導出する. これは, 探索空間を網目状に分割し, 全ての分割点上で必ず評価を行う

ことで近似解を探索する手法である. 全探索では分割点同士の間隔や近似解しきい値の設定が適切であれば必ず近似解を発見できる利点がある一方で, 一定の間隔で必ず評価を行うため計算コストが大きくなってしまいうという欠点がある. 従って, 代替手法として PSO を適用する.

PSO では定義された粒子群(トポロジー)に基づいて粒子が持つ評価情報を共有しながら目的関数の最適解を探索する. PSO では勾配情報が不要なため, ニュートン法など他の最適化手法では解けない問題にも適用可能であるという利点がある. 一方で, PSO には欠点がある. 目的関数に複数存在する解を探索する問題を複数解問題(Multi-solution Problems, MSP)とよぶが, PSO を MSP に適用する場合, 粒子が過去に発見した近似解にトラップされて他の近似解を探索できないという現象が起こる.

局所解トラップを避けるための代表的な手法としてタブー探索法がある[6]. 本研究でも複数の近似解を探索するため, タブー探索法を含めた PSO アルゴリズムを適用する. 例題のサインサークルマップを用いた近似解探索の過程や結果を考察する.

2. 目的関数

以下の 1 次元離散時間力学系を考える :

$$\theta_n = f(\theta_n), \theta_n \in [0,1] \quad (1)$$

1 次元離散時間力学系の典型例であるサインサークルマップは次式で与えられる：

$$\theta_{n+1} = \alpha \sin 2\pi \theta_n + \beta, a \equiv (\alpha, \beta) \quad (2)$$

このマップはパラメータ a の値を変えると様々な分岐現象を呈するが、ここでは不動点による周期倍分岐と2周期点による周期倍分岐を考える。

不動点 p_1 及び2周期点 p_2 は、それぞれ次式により定義される：

$$f(p_1) = p_1 \quad (3)$$

$$f(f(p_2)) \equiv f^2(p_2) = p_2, f(p_2) \neq p_2 \quad (4)$$

不動点及び2周期点での傾きが-1となると、それぞれの点による周期倍分岐が生じる。従って、それぞれの点による周期倍分岐条件は次式により定義される：

$$\left. \frac{d}{d\theta} f(\theta, a) \right|_{\theta=p_1} \equiv Df(p_1, a) = p_1 \quad (5)$$

$$\left. \frac{d}{d\theta} f^2(\theta, a) \right|_{\theta=p_2} \equiv Df^2(p_2, a) = p_2 \quad (6)$$

周期倍分岐集合を導出するために、式(3)～(6)に基づく目的関数を定義する。ここでは、不動点による周期倍分岐集合を導出する関数を $F_1(a)$ 、2周期点による周期倍分岐集合を導出する関数を $F_2(a)$ とする。 $F_1(a) = 0$ 、 $F_2(a) = 0$ となる a を解とする場合、各関数の解集合が周期倍分岐集合に対応する：

$$F_1(a) = |f(\theta_\mu, a) - \theta_\mu| + |Df(\theta_\mu, a) + 1| \geq 0 \quad (7)$$

$$F_2(a) = |f^2(\theta_\mu, a) - \theta_\mu| + |Df^2(\theta_\mu, a) + 1| \geq 0 \quad (8)$$

ただし、 μ は空回し回数であり、 θ_μ の導出後に $F_1(a)$ 、 $F_2(a)$ を計算する。

ここで、目的関数 $H(a)$ の最適化により2つの周期倍分岐集合を同時に導出するため、 $H(a)$ を次式により定義する：

$$H(a) = F_1(a)F_2(a) \quad (9)$$

3. PSO アルゴリズム

はじめに、目的関数の近似解 a_s とパラメータ探索空間 S_D を定義する：

$$H(a_s) < \varepsilon \quad (10)$$

$$S_D \equiv \{(\alpha, \beta) | \alpha_{\min} < \alpha \leq \alpha_{\max}, \beta_{\min} < \beta \leq \beta_{\max}\} \quad (11)$$

ここで、所望の範囲かつ間隔で近似解を探索するために、横線の探索直線を m 本設定する：

$$d = (\beta_{\max} - \beta_{\min}) / (m - 1) \quad (12)$$

$$l_z : \beta = \beta_{\min} + (z - 1)d, z = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

ただし、 d は探索直線同士の間隔である。PSO での探索範囲は m 本の探索直線上に限定される。以上の定義に基づく PSO のアルゴリズムを以下に述べる。

はじめに、粒子の表記を定義する。 N は粒子数で g は世代である。 $\mathbf{x}^i(g) \equiv (x_\alpha^i(g), x_\beta^i(g))$ と $\mathbf{v}^i(g) \equiv (v_\alpha^i(g), v_\beta^i(g))$ はそれぞれ i 番目 ($i = 1, 2, \dots, N$) 粒子の位置と速度である。ただし、 $\mathbf{x}^i(g)$ はパラメータ a に対応し、 $x_\beta^i(g)$ は探索直線上に限定される。また、 $v_\beta^i(g) = 0$ は全粒子全世代において適用される。パーソナルベスト $\mathbf{p}^i(g) \equiv (p_\alpha^i(g), p_\beta^i(g))$ は、 i 番目の粒子が現在までにとった位置の中で最も評価が良かった位置に対応する。粒子群のトポロジーはリング結合とする。従って、 i 番目の粒子およびその両端の粒子のパーソナルベストの中で最も評価の良いものが、ローカルベスト $\mathbf{L}^i(g) \equiv (L_\alpha^i(g), L_\beta^i(g))$ である。

Step 1 : 初期位置 $\mathbf{x}^i(0)$ と $\mathbf{v}_\alpha^i(0)$ を以下の通り設定する：

$$x_\alpha^i(g) = \alpha_{\min} + i(\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) / (N - 1) \quad (14)$$

$$x_\beta^i(g) = \beta_{\min} + (z - 1)d \quad (15)$$

$$v_\alpha^i(g) = \text{RND}[-0.035, 0.035] \quad (16)$$

Step 2 : 粒子の速度と位置を次式により更新する：

$$v_\alpha^i(g) \leftarrow w x_\alpha^i(g) + c(p_\alpha^i(g) - x_\alpha^i(g)) + c(L_\alpha^i(g) - x_\alpha^i(g)) \quad (17)$$

$$x_\alpha^i(g) \leftarrow x_\alpha^i(g) + v_\alpha^i(g) \quad (18)$$

ただし、 w は慣性定数、 c は加速度係数である。

Step 3 : $\mathbf{p}^i(g)$ と $\mathbf{L}^i(g)$ を次式により更新する：

$$\mathbf{p}^i(g) \leftarrow \mathbf{x}^i(g) \quad \text{if} \quad H(\mathbf{p}^i(g)) > H(\mathbf{x}^i(g)) \quad (19)$$

$$\mathbf{L}^i(g) \leftarrow \mathbf{p}^i(g) \quad \text{if} \quad H(\mathbf{L}^i(g)) > H(\mathbf{p}^i(g)) \quad (20)$$

Step 4 : 式(21)を満たした場合、 $\mathbf{L}^i(g)$ を近似解とみなす：

$$H(\mathbf{L}^i(g)) < \varepsilon \quad (21)$$

$$\mathbf{a}_s \equiv (\alpha_s, \beta_s) \leftarrow \mathbf{L}^i(g) \quad (22)$$

\mathbf{a}_s の位置を基準に直線上にタブー区間 R_T を設定：

$$R_T = \{\alpha | |\alpha - \alpha_s| \leq r\} \quad (23)$$

ここで、 $2r$ がタブー区間の距離である。粒子の局所解トラップを避けるため、区間内はその評価を ζ に改悪する：

$$H(a) = \zeta \quad \text{for} \quad a \in R_T \quad (24)$$

Step 5 : $g \leftarrow g + 1$ とし、世代上限 g_{\max} まで **Step 2** へ。

Step 6 : $z \leftarrow z + 1$ とし、次の探索直線に移行する。

全ての探索直線上で探索を終えたら探索終了。

4. 数値実験

試行錯誤で PSO パラメータ値は以下の通り設定した.

$$\alpha_{min} = 0, \alpha_{max} = 0.35, \beta_{min} = 0.15, \beta_{max} = 0.5, \varepsilon = 0.04, m = 30$$

$$N = 20, g_{max} = 25, w = 0.7, c = 0.9, r = 0.05, \zeta = 2$$

PSO による探索の過程を図 1 に, 結果を図 2 に示す. 黒線は全探索で導出した不動点による周期倍分岐集合, 紫線は全探索で導出した 2 周期点による周期倍分岐集合, 緑線は探索直線, 橙線はタブー区間, 青丸は粒子, 赤×は発見した近似解の位置である.

図 1 より, 過去に発見した近似解位置周辺がタブー区間としてその評価が改悪され, 2 つ目の近似解を発見できていることがわかる. また, 図 2 より, 探索直線上に存在する全ての近似解が PSO によって正しく発見されていることがわかる.

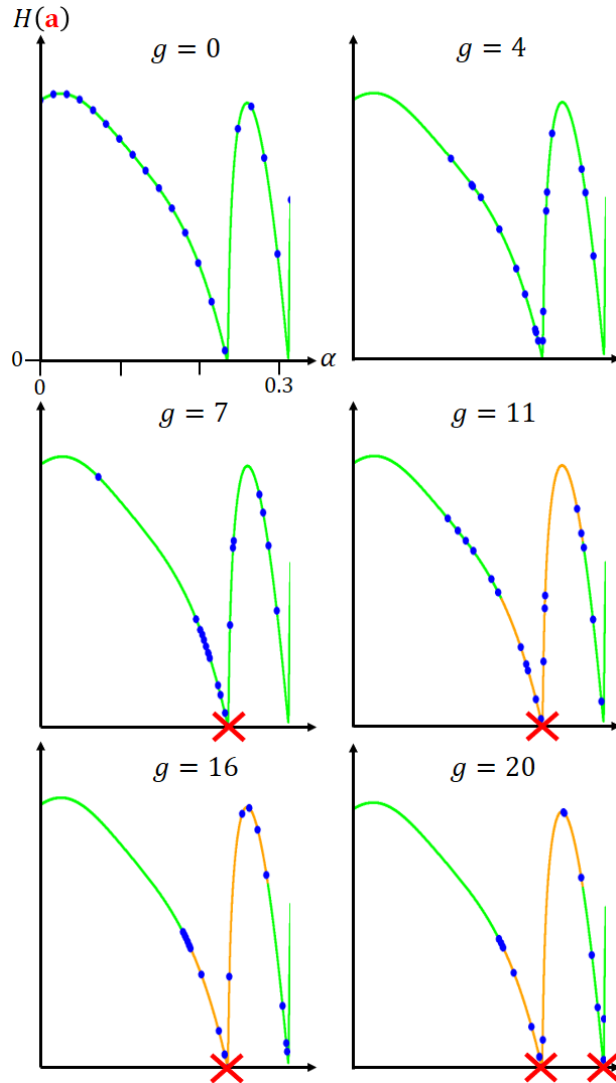


図 1 探索過程

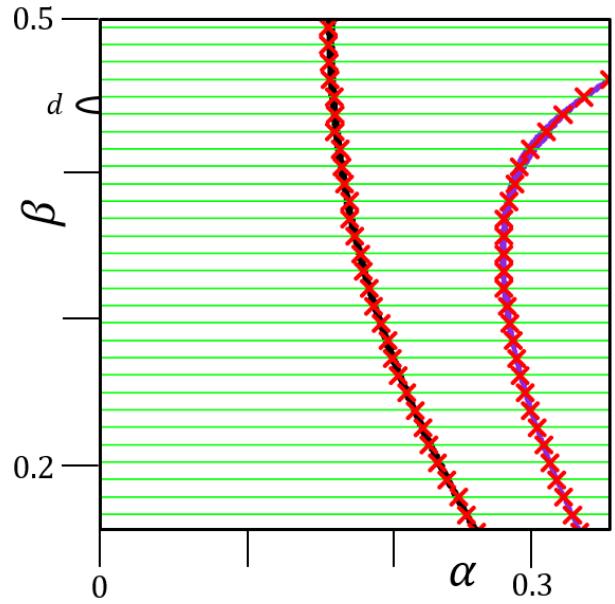


図 2 探索結果

5. むすび

PSO で複数の周期倍分岐集合を探索する問題において, その探索過程や結果を考察した. その際, 複数の周期倍分岐集合を同時に導出できる目的関数を提案した. また, 過去に発見した近似解に粒子がトラップされないようにタブー探索法を適用した. より複雑な問題への応用が今後の課題である.

謝辞: 指導教授の斎藤利通先生, 沢山の意見を頂いた同研究室の皆様ならびに書類提出等でお世話になった大学職員の皆様に感謝申し上げます.

参考文献

- [1] E. Ott, Chaos in dynamical systems, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [2] S. Li and B. Fahimi, On the Period-doubling Bifurcation in PWM-controlled Buck Converter, Proc. IEEE Transportation Electrification Conference and Expo, pp. 589 - 594, 2018.
- [3] J. Lee, D. J. Hyun, J. Ahn, S. Kim and N. Hogan, On the Dynamics of a Quadruped Robot Model with Impedance Control: Self-stabilizing High Speed Trot-running and Period-doubling Bifurcations, Proc. IEEE/RSJ pp. 4907 - 4913, 2014.
- [4] A. P. Engelbrecht, Fundamentals of computational swarm intelligence, Wiley, 2005.
- [5] H. Matsushita, Y. Tomimura, H. Kurokawa, T. Kousaka, Period Doubling Bifurcation Point Detection Strategy with Nested Layer Particle Swarm Optimization, IJBC, pp. 1750101.1 - 16, 2017.
- [6] K. E. Parsopoulos and M. N. Vrahatis, On the computation of all global minimizers through particle swarm optimization, IEEE Trans. Evol. Comput., vol. 8, no. 3, pp. 211 - 224, 2004.